

## CAPITOLO 8

### DINAMICA DEI FLUIDI VISCOSI (\*)

8.1 - La derivazione delle eq.ni del moto per fluidi viscosi è sostanzialmente simile a quella delle eq.ni del moto per fluidi ideali (V. Capitolo 6). Tali eq.ni possono essere ottenute, in entrambi i casi, a partire dalla eq.ne del moto di Cauchy, valida per un continuo qualsiasi.

8.2 - L'EQ.NE DEL MOTO DI CAUCHY. Si applica il principio della Q.d.M. alla massa che all'istante  $t$  occupa il volume  $V$  racchiuso dalla superficie  $A$  e si perviene, dopo aver applicato il teorema di trasporto, nella forma che tiene già conto dell'eq.ne di continuità, alla eq.ne (6.2) che qui si riscrive

$$(8.1) \quad \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_A \vec{p} dA$$

Esprimendo la pressione  $\vec{p}$  in funzione del tensore delle pressioni  $\vec{T}$  attraverso l'eq.ne (V. Capitolo 2)

$$(8.2) \quad \vec{p} = \vec{n} \cdot \vec{T}$$

nella quale  $\vec{n}$  è il versore normale orientato verso l'interno del volume  $V$ , e introducendo l'eq.ne (8.2) nella eq.ne (8.1) si ottiene

$$(8.3) \quad \int_V \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_A \vec{n} \cdot \vec{T} dA$$

L'integrale di superficie che compare a secondo membro di quest'ultima eq.ne può essere trasformata in un integrale di volume per mezzo del teorema della divergenza (V. Appendice 2). Si ha

$$(8.4) \quad \int_A \vec{n} \cdot \vec{T} dA = - \int_V \text{div } \vec{T} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{T} dV$$

per cui risulta

$$(8.5) \quad \int_V \left[ \rho \left( \vec{f} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) - \vec{\nabla} \cdot \vec{T} \right] dV = 0$$

Tenuto conto dell'arbitrarietà del volume  $V$ , affinché l'eq.ne integrale

---

(\*) - Stesura del prof.ing. Giulio Scarsi

(8.5) sia sempre verificata deve risultare

$$(8.6) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = \rho \left( \vec{f} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)$$

L'eq. (8.6) è l'eq.ne differenziale del moto di Cauchy, valida per un continuo qualsiasi, in quanto è indipendente dalla forma che il tensore delle pressioni (o degli sforzi)  $\vec{T}$  presenta. Essa è equivalente in coordinate cartesiane, alle tre eq.ni scalari

$$(8.7) \quad \begin{aligned} p_{xx,x} + p_{yx,y} + p_{zx,z} &= \rho \left( f_x - \frac{Dv_x}{Dt} \right) \\ p_{xy,x} + p_{yy,y} + p_{zy,z} &= \rho \left( f_y - \frac{Dv_y}{Dt} \right) \\ p_{xz,x} + p_{yz,y} + p_{zz,z} &= \rho \left( f_z - \frac{Dv_z}{Dt} \right) \end{aligned}$$

ottenute dalla eq.ne (8.6) dopo aver sviluppato il prodotto scalare  $\vec{\nabla} \cdot \vec{T}$  tra l'operatore vettoriale differenziale  $\vec{\nabla}$  e il tensore delle pressioni  $\vec{T}$  come è indicato qui di seguito

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{T} &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \vec{i} (p_{xx,x} + p_{yx,y} + p_{zx,z}) + \vec{j} (p_{xy,x} + p_{yy,y} + p_{zy,z}) + \vec{k} (p_{xz,x} + p_{yz,y} + p_{zz,z}) \end{aligned}$$

8.3 - L'EQ.NE COSTITUTIVA. I FLUIDI STOKESIANI A VISCOSITA' LINEARE. La relazione tra il tensore delle pressioni  $\vec{T}$  e le altre grandezze cinematiche e dinamiche che concorrono a caratterizzare lo stato di moto di un continuo rappresenta l'eq.ne costitutiva che definisce la natura del continuo stesso e che, introdotta nell'eq.ne (8.6) di Cauchy, consente di ottenere l'eq.ne del moto per il particolare mezzo che si considera. Per fluidi ideali (distribuzione isotropica della pressione:  $\vec{p} = \vec{n} p$ ) il tensore delle pressioni  $\vec{T}$  può porsi nella forma ( $\vec{I}$  = tensore unitario)

$$(8.8) \quad \vec{T} = p \vec{I}$$

che rappresenta l'eq.ne costitutiva di tali fluidi e che, introdotta nella eq.ne (8.6), trasforma quest'ultima, correttamente, nell'eq.ne del moto (6.3) di Eulero.

Per i fluidi viscosi si hanno diverse eq.ni costitutive in relazione ai loro diversi comportamenti reologici. Qui si considerano i fluidi stokesiani, cioè i fluidi viscosi caratterizzati da una eq.ne costitutiva che soddisfa ai quattro postulati introdotti da Stokes e che si possono riassumere nella forma:

1. il tensore delle pressioni  $\vec{T}$  è una funzione continua del tensore velocità di deformazione  $\vec{D}$ , definito dalla matrice (4.16) ed è indipendente dalle altre grandezze cinematiche e dinamiche;

2. il tensore delle pressioni  $\vec{T}$  non dipende esplicitamente dalle coordinate del punto che si considera (omogeneità spaziale);

3. non vi sono direzioni preferenziali nello spazio (isotropia spaziale), cioè una data deformazione produce la stessa risposta intrinseca del sistema, indipendentemente dall'orientamento della deformazione stessa;

4. all'annullarsi del tensore velocità di deformazione  $\vec{D}$ , il tensore delle pressioni  $\vec{T}$  si riduce a  $p\vec{I}$ , cioè alla forma che esso presenta in condizioni statiche e in condizioni di moto ideale.

I postulati predetti conducono alla seguente formulazione generale della eq.ne costitutiva

$$(8.9) \quad \vec{T} = \alpha \vec{I} + \beta \vec{D} + \gamma \vec{D}^2$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono funzioni scalari degli invarianti principali del tensore  $\vec{D}$ .

Aggiungendo la condizione di linearità tra le componenti del tensore  $\vec{T}$  e le componenti del tensore  $\vec{D}$ , l'eq.ne (8.9) si riduce alla (\*)

$$(8.10) \quad \vec{T} = (p - \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \vec{I} - 2\mu \vec{D}$$

nella quale  $\lambda$  è una funzione scalare correlata alla viscosità dinamica dalla eq.ne

$$3\lambda + 2\mu = 0$$

Un fluido stokesiano la cui eq.ne costitutiva è rappresentata dalla eq.ne (8.10) viene detto a viscosità lineare. Tale eq.ne nel caso di fluido incomprimibile ( $\rho = \text{cost}$ ), si semplifica nella

$$\vec{T} = p\vec{I} - 2\mu \vec{D} = \begin{bmatrix} p - 2\mu v_{x,x} & -\mu(v_{x,y} + v_{y,x}) & -\mu(v_{x,z} + v_{z,x}) \\ -\mu(v_{x,y} + v_{y,x}) & p - 2\mu v_{y,y} & -\mu(v_{y,z} + v_{z,y}) \\ -\mu(v_{x,z} + v_{z,x}) & -\mu(v_{y,z} + v_{z,y}) & p - 2\mu v_{z,z} \end{bmatrix}$$

(\*) V. "Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics" di J.Serrin in "Handbuch der Physik" vol. VIII/1, Springer, Verlag 1959.

in quanto  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  (V. eq.ne di continuità per fluidi incomprimibili).  
Le eq.ni tensoriali (8.10), (8.11) sono equivalenti alle eq.ni scalari  
( $i, j = x, y, z$ )

$$(8.12) \quad p_{ij} = p_{ji} = (p - \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \delta_{ij} - \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{fluidi compr.})$$

$$(8.13) \quad p_{ij} = p_{ji} = p - \mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{fluidi incompr.})$$

in cui:  $p_{ij} = p_{ji}$  per la simmetria del tensore  $\bar{T}$ ;  $\delta_{ij} = 1$  per  $i = j$ ,  
 $\delta_{ij} = 0$  per  $i \neq j$  ( $\delta_{ij}$  è l'indice di Kronecker).

Le eq.ni (8.12), (8.13) mostrano che (V. Cap. 4, par. 4.7):

(a) le componenti  $p_{ii}$  ad indici eguali del tensore delle pressioni  
( $i = j$ , tensioni normali) dipendono dalla pressione isotropica e, attraverso la viscosità dinamica, dalle velocità di deformazione lineare. Infatti

$$p_{ii} = p - 2 \mu v_{i,i} + \frac{2}{3} \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (\text{fluidi compr.})$$

$$p_{ii} = p - 2 \mu v_{i,i} \quad (\text{fluidi incompr.})$$

(b) le componenti  $p_{ij}$  ad indici distinti del tensore delle pressioni  
( $i \neq j$ , tensioni tangenziali) sono proporzionali, attraverso la viscosità dinamica, alle velocità di deformazione angolare. Infatti

$$(8.14) \quad p_{ij} = p_{ji} = -\mu (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (\text{fluidi compr. ed incompr.})$$

L'eq.ne (8.14) rappresenta la generalizzazione ad un moto qualsiasi della eq.ne di Newton (1.7) (Cap. 1) che fornisce la tensione tangenziale  $\tau = p_{yx} = p_{xy} = -\mu v_{x,y}$  nel caso di un moto unidirezionale descritto dalla velocità  $\vec{v} = \vec{i}_x v_x(y)$ .

Un fluido stokesiano a viscosità lineare è quindi un fluido newtoniano.

8.4 - LE EQ.NI DI NAVIER-STOKES sono le eq.ni del moto di un fluido stokesiano a viscosità lineare. Qui si ricavano tali eq.ni per fluidi incomprimibili per i quali l'eq.ne costitutiva è rappresentata dall'eq.ne (8.11). Particolarizzando l'eq.ne del moto di Cauchy (8.6) con l'eq.ne (8.11) si ha

$$(8.15) \quad \vec{\nabla} \cdot (p\vec{I}) - \vec{\nabla} \cdot (2\mu\vec{D}) = \rho \left( \vec{f} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right)$$

Poichè risulta (V. Appendice 2, eq.ne A2.11) (\*)

(\*) - Si ritiene la viscosità dinamica  $\mu$  costante (cioè indipendente dalla posizione e dal punto) come comunemente viene fatto nella meccanica dei fluidi.

$$\vec{\nabla} \cdot (p\vec{I}) = \vec{\nabla} p$$

$$\vec{\nabla} \cdot (2\mu\vec{D}) = \mu\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \mu\nabla^2 \vec{v} = \mu\nabla^2 \vec{v} \quad (*)$$

l'eq.ne (8.15) assume la forma

$$(8.16) \quad \vec{\nabla} p = \varrho \left( \vec{f} - \frac{D\vec{v}}{Dt} \right) + \mu\nabla^2 \vec{v}$$

che rappresenta l'eq.ne di Navier-Stokes in forma vettoriale. Essa è equivalente, in coordinate cartesiane, alle tre eq.ni scalari

$$(8.17) \quad \begin{aligned} p_{,x} &= \varrho \left( f_x - \frac{Dv_x}{Dt} \right) + \mu\nabla^2 v_x \\ p_{,y} &= \varrho \left( f_y - \frac{Dv_y}{Dt} \right) + \mu\nabla^2 v_y \\ p_{,z} &= \varrho \left( f_z - \frac{Dv_z}{Dt} \right) + \mu\nabla^2 v_z \end{aligned}$$

Si ha

$$\frac{Dv_x}{Dt} = v_{x,t} + v_x v_{x,x} + v_y v_{x,y} + v_z v_{x,z}$$

$$\nabla^2 v_x = v_{x,xx} + v_{x,yy} + v_{x,zz}$$

e analogamente per le altre componenti.

Assegnate le condizioni al contorno, le eq.ni (8.17), l'eq.ne di continuità  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$  e l'eq.ne di stato  $\varrho = \text{cost}$  sono necessarie e sufficienti per determinare completamente lo stato di moto del fluido viscoso considerato. Tuttavia, sino ad oggi, non esistono metodi generali per la integrazione delle eq.ni differenziali (8.17) e la ragione risiede nel fatto che tali eq.ni contengono le derivate II<sup>e</sup> della velocità nei termini viscosi e, per la presenza dei termini convettivi nelle derivate sostanziali, non sono lineari (\*\*). Si possono ottenere soluzioni soltanto per particolari tipi di moto per i quali le eq.ni (8.17) si linearizzano direttamente (soluzioni esatte), come ad esempio per il moto laminare uniforme nei condotti cilindrici, oppure si linearizzano in conseguenza delle approssimazioni introdotte (soluzioni approssimate) come ad esempio per il moto laminare permanente attorno ad una sfera con valori della velocità molto bassi (forze di iner

(\*) - Come prova di questo risultato si calcoli, ad es. la componente su x del prodotto  $\vec{\nabla} \cdot (2\mu\vec{D})$ . Si ha

$$2\mu \left[ v_{x,xx} + \frac{1}{2}(v_{y,xy} + v_{x,yy}) + \frac{1}{2}(v_{z,xz} + v_{x,zz}) \right] = \mu \frac{\partial}{\partial x} (v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z}) + \mu (v_{x,x} + v_{y,y} + v_{z,z})$$

(\*\*) - Utilizzando metodi alle differenze finite o agli elementi finiti è possibile integrare numericamente (con calcolatore) le eq.ni di Navier-Stokes; resta aperto, in alcuni casi, il problema dell'esistenza della soluzione.

zia che si trascurano rispetto alle forze viscosse).

Le condizioni al contorno, già introdotte ed esaminate per il moto dei fluidi ideali (V. Cap. 6, par. 6.3) sono qui completate con la condizione di aderenza.

Essa traduce l'osservazione sperimentale che particelle fluide viscosse a contatto con una superficie solida aderiscono alla superficie stessa e non scorrono rispetto a questa, presentando quindi una velocità relativa nulla.

### 8.5 - ESEMPI DI MOTI VISCOSI (APPL. EQ.NI NAVIER-STOKES)

8.5.1 - Moto laminare fra due piastre parallele. Per un fluido stokesiano a viscosità lineare incomprimibile compreso tra due piastre parallele (fig. 8.1), si consideri il moto piano laminare (moto che avviene per lamine parallele alle piastre) dovuto al

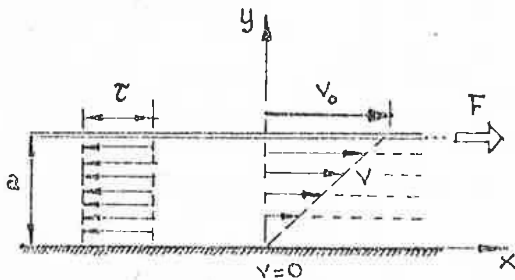


Fig. 8.1

lo scorrimento, con velocità uniforme  $v_0$ , di una piastra rispetto all'altra.

Sia  $x$  la direzione del moto; risulta  $v_x = v(y)$ ,  $v_y = 0$ ,  $v_z = 0$ . Dalla prima delle  $y$  eq.ni (8.17) si ha

$$p_{,x} = \rho \left( f_x - \frac{Dv}{Dt} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

che si semplifica nella eq.ne

$$(8.18) \quad \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

in quanto:  $p_{,x} = 0$  (il moto è dovuto solo al trascinamento della piastra superiore, senza variazioni di pressione);  $f_x = 0$  (il campo esterno delle forze di massa, che è quello gravitazionale, non ammette componente nella direzione orizzontale);  $Dv/Dt = 0$  (il moto è permanente e uniforme).

L'integrazione della eq.ne (8.18) con le condizioni al contorno:  $v = 0$  per  $y = 0$ ,  $v = v_0$  per  $y = a$ , conduce alla seguente distribuzione lineare della velocità

$$v = v_0 y/a$$

Le tensioni tangenziali si riducono alle  $\tau' = p_{yx} = p_{xy} = -\mu dv/dy = -\mu v_0/a$  e si mantengono costanti con  $y$ . Il moto esaminato rappresenta un moto piano alla Couette.

8.5.2 - Moto laminare uniforme nei condotti cilindrici. Nella eq.ne vettoriale di Navier-Stokes (8.16) introduciamo come campo esterno delle forze di massa il campo gravitazionale che ammette come funzione potenziale  $\varphi = -gz$  (l'asse  $z$  è verticale e positivo verso l'alto) (\*). Risulta ( $\rho = \text{cost}$ )

(\*) - La funzione potenziale  $\varphi$  è definita a meno di una costante, qui posta eguale a zero.

$$(8.19) \quad \vec{\nabla} h = -\frac{1}{g} \frac{D\vec{v}}{Dt} + \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 \vec{v}$$

essendo  $h = p/\gamma + z$  il carico piezometrico.

Per un fluido stokesiano a viscosità lineare incomprimibile si consideri il moto laminare permanente entro un tubo circolare di asse  $x$  (fig. 8.2).  
Risulta

$$(8.20) \quad \vec{v} = \vec{i} v_x \quad (\text{moto unidirezionale per la condizione di lamina rietà})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad (\text{moto permanente, ed anche uniforme per la condizione di continuità } v_{x,x} = 0)$$

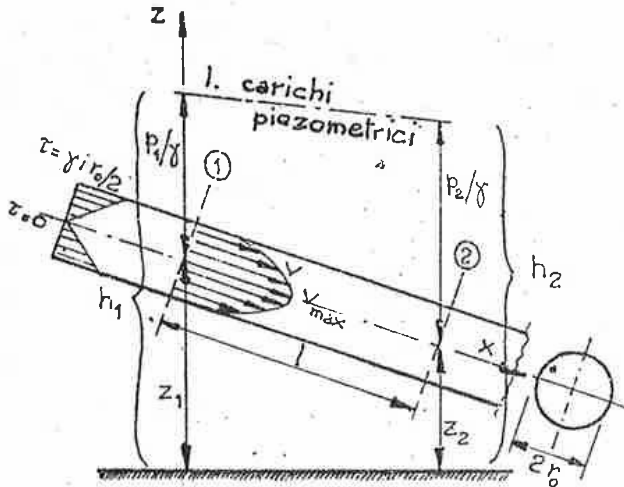


Fig. 8.2

Inoltre, in ogni sezione trasversale, nella quale si assumono le coordinate polari  $r$ , le isotachie (linee a egual velocità) sono, per la simmetria assiale, circonferenze concentriche con valori della velocità  $v_x = v(r)$  crescenti dal valore nullo alla parete ( $r = r_0$ , condizione di aderenza) al valore massimo che si ha in corrispondenza all'asse,

cioè

$$(8.21) \quad v = 0 \quad \text{per } r = r_0$$

$$(8.22) \quad \frac{dv}{dr} = 0 \quad \text{per } r = 0$$

Con l'eq.ne (8.20), l'eq.ne (8.19) si semplifica nella

$$\vec{\nabla} h = + \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 \vec{v}$$

che, proiettata nella direzione  $x$  del moto e nelle direzioni  $r$  e  $\vartheta$  delle coordinate polari su una sezione normale al moto, fornisce le due eq.ni scalari ( $v_x = v$ ,  $v_r = 0$ )

$$(8.23) \quad h_{,x} = \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 v$$

$$(8.24) \quad h_{,r} = h_{,\vartheta} = 0.$$

L'integrazione dalla eq.ne (8.24) conduce a

$$(8.25) \quad h = h(x)$$

Cioè

(a) il carico piezometrico  $h$  è costante in ogni sezione trasversale e la distribuzione delle pressioni risulta idrostatica;

(b) l'eq.ne (8.23) può essere riscritta nella forma

$$(8.26) \quad \frac{dh}{dx} = -i = \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 v$$

avendo indicato con

$$i = - \frac{dh}{dx}$$

la pendenza motrice. Essa rappresenta la perdita di carico piezometrico per unità di lunghezza che, nel caso considerato, è costante perchè il II° membro della (8.26) non dipende da  $x$ . Tale risultato deriva dall'uniformità del moto; la pendenza motrice è data, in termini finiti, dalla  $i = (h_1 - h_2)/\ell$  ed è coincidente con la perdita di carico effettivo per unità di lunghezza  $(H_1 - H_2)/\ell$ .

In coordinate polari si ha

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$$

perchè  $v$  non dipende da  $\theta$ . L'eq.ne (8.26) diventa

$$i = - \frac{\mu}{\gamma} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$$

e quindi

$$(8.27) \quad \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = - \frac{\gamma i}{\mu} r$$

L'integrazione della eq.ne (8.27) fornisce, tenendo conto della condizione

$$(8.22) \quad \frac{dv}{dr} = - \frac{\gamma i}{\mu} \frac{r}{2}$$

mentre l'integrazione della eq.ne (8.27a) conduce, tenendo conto della condizione (8.21), alla seguente relazione

$$(8.28) \quad v = \frac{\gamma i}{4\mu} (r_o^2 - r^2).$$

La distribuzione della velocità lungo ogni raggio è parabolica e il solido delle velocità è un paraboloide di rotazione; le tensioni tangenziali si riducono a  $\tau = p_{rx} = p_{xr} = -\mu (\gamma i r / 2\mu)$ , annullandosi per  $r = 0$  e raggiungendo linearmente il valore (assoluto) massimo per  $r = r_o$ .

La velocità media  $U$  risulta ( $\Omega$  = area della sezione normale)

$$(8.29) \quad U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} v \, d\Omega = \frac{1}{\pi r_o^2} \int_0^{r_o} v \, 2\pi r \, dr = \frac{\gamma i}{8\mu} r_o^2 = \frac{v_{\max}}{2}$$



essendo  $v_{\max}$  la velocità massima che si ha per  $r = 0$ .

Facendo intervenire nella espressione della velocità media  $U$  la sezione  $\Omega$  si ha

$$(8.30) \quad U = \frac{1}{8\pi} \frac{\gamma \Omega}{\mu} i \quad (\text{legge di Hagen-Poiseuille})$$

Per tubi cilindrici di sezione diversa dalla circolare valgono ancora eq.ni analoghe alla (8.30)

$$(8.31) \quad U = c_f \frac{\gamma \Omega}{\mu} i$$

dove il coefficiente  $c_f$  (coefficiente di forma) dipende dalla forma della sezione. Si ha  $c_f = 1/8\pi$  per sezioni circolari (v. eq.ne 8.30),  $c_f = 1/7,125\pi$  per sezioni quadrate,  $c_f = 1/6,625\pi$  per sezioni triangolari equilateri,  $c_f = 1/12\pi$  per sezioni rettangolari infinitamente larghe.

8.5.3 - L'eq.ne (8.30) può essere applicata solamente quando il moto laminare nel tubo circolare è completamente sviluppato, ciò che si realizza ad una sufficiente distanza dalla sezione iniziale. Se questa è opportunamente raccordata al serbatoio, come è indicato nella fig. 8.3, la velocità del fluido in tale

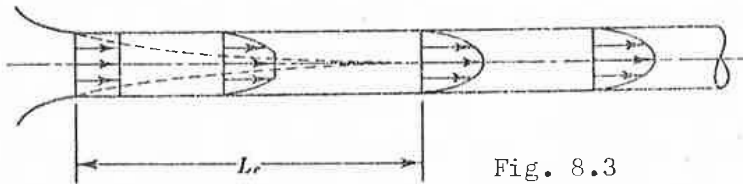


Fig. 8.3

sezione si può ritenere uniforme in quanto il moto è essenzialmente irrotazionale.

La regione in moto irrotazionale si riduce

via via all'allontanarsi della sezione iniziale sino a scomparire completamente quando la velocità assume la distribuzione parabolica. La distanza tra la sezione iniziale e la prima sezione in cui il moto laminare è completamente sviluppato rappresenta la lunghezza di transizione  $L_e$ , il cui valore è dell'ordine di qualche decina di volte il valore del diametro.